

Chapitre 26

Développements limités

Plan du chapitre

1	Introduction aux DL	2
1.1	DL en 0 et rôle du DL en tant qu'approximation	2
1.2	Transformation d'une expression en un petit- o	3
1.3	DL en un point a quelconque	4
1.4	Admis pour le moment : unicité, troncature et parité de DL	5
1.5	Formule de Taylor-Young, DL usuels	6
2	Opérations sur les DL	7
2.1	Opérations entre plusieurs petit- o	7
2.2	Combinaison linéaire de DL	9
2.3	Produit de DL	11
2.4	Composition à droite et substitution dans les DL	12
2.5	Passage à l'inverse dans un DL	14
2.6	Liens entre DL, limite, dérivabilité	16
2.7	Intégration de DL	17
2.8	Dérivation de DL ? Attention !	19
3	Applications des développements limités	19
3.1	Obtention d'équivalents	19
3.2	Étude du signe local	20
3.3	Extrema locaux : conditions du second ordre	22
3.4	Développements asymptotiques (DA)	23
3.5	Asymptotes obliques	25
4	Méthodes pour les exercices	28

Hypothèse

Dans tout ce chapitre :

- le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- n est un entier naturel.
- D et D' sont des parties de $\mathbb{R}$ qui peuvent s'écrire comme une réunion d'un ou plusieurs intervalles non triviaux, par exemple $D = \mathbb{R}^*$, $D = D_{\tan}$ ou encore $D = [-3, -2] \cup \mathbb{R}_+$.
- a est un point de $\overline{D}$, i.e. $a \in D$ ou a est une extrémité finie d'un intervalle de D .
- f et g désignent des fonctions définies sur D ou sur $D \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Contrairement au chapitre précédent, le point a ne peut plus être infini. C'est donc un point de $\overline{D}$ avec la

définition qui sera donnée en MP. Au chapitre précédent, on supposait que f et/ou g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a . Cette hypothèse n'est plus nécessaire ici car on considérera uniquement des petit- o sous la forme $o((x-a)^k)$ avec $k \in \mathbb{N}$, et la fonction $x \mapsto (x-a)^k$ ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a .

1 Introduction aux DL

1.1 DL en 0 et rôle du DL en tant qu'approximation

Dorénavant, on accepte la réécriture suivante :

$$f(x) = g(x) + o_{x \rightarrow 0}(\dots) \text{ signifie que } f(x) - g(x) = o_{x \rightarrow 0}(\dots)$$

Définition 26.1

On dit que f admet un développement limité (DL) à l'ordre n en 0 s'il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que :

Cela signifie donc que $f(x) - (\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n)$ est négligeable devant x^n lorsque x tend vers 0.

Exemple 1. On justifiera plus tard que la fonction $\exp$ admet un DL à tout ordre en 0 :

$$\text{DL à l'ordre 0 : } e^x = 1 + o_{x \rightarrow 0}(1)$$

$$\text{DL à l'ordre 1 : } e^x = 1 + x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

$$\text{DL à l'ordre 2 : } e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

$$\text{DL à l'ordre 3 : } e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

Remarque. Un DL de f en 0 représente une **approximation** de la valeur de $f(x)$ par un polynôme lorsque x est proche de 0.

- Plus le DL est d'**ordre élevé**, et plus cette approximation est **précise**.
- Plus x est **proche de 0**, et plus cette approximation est **précise**.

	x	0	0,001	0,01	0,1
Erreur avec le DL à l'ordre 0 :	$e^x - 1$	0	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
Erreur avec le DL à l'ordre 1 :	$e^x - (1 + x)$	0	10^{-7}	10^{-5}	10^{-3}
Erreur avec le DL à l'ordre 2 :	$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$	0	10^{-10}	10^{-7}	10^{-4}
Erreur avec le DL à l'ordre 3 :	$e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)$	0	10^{-14}	10^{-10}	10^{-6}

L'idée fondamentale des développements limités est de pouvoir fournir une approximation aussi précise que l'on veut de $f(x)$. Cela peut servir notamment à :

- Obtenir des équivalents (notamment lorsqu'il y a une somme).
- Calculer des limites en levant des formes indéterminées.
- Déterminer si un point d'une courbe est un maximum, un minimum, ou ni l'un ni l'autre.

1.2 Transformation d'une expression en un petit- o

Théorème 26.2

Soit $r(x)$ une expression définie sur D .

Ceci permet de faire apparaître un petit- o pour en déduire un DL.

Exemple 2 (Exemple important). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ admet un $DL_n(0)$.

Exemple 3. Montrer que $1 + x^3 \ln x$ admet un $DL_2(0)$.

Exemple 4. Un étudiant écrit le raisonnement suivant :

$$\begin{aligned} 1 + x^3 \ln x &= 1 + x^3 \ln x + x^3 \times \underbrace{0}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} \\ &= 1 + x^3 \ln x + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \end{aligned}$$

et conclut qu'il s'agit du $DL_3(0)$ de $1 + x^3 \ln x \dots$ Est-ce correct ?

1.3 DL en un point a quelconque

Définition 26.3 – Développement limité

On dit que f admet un DL à l'ordre n en a s'il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \alpha_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \dots + \alpha_n(x-a)^n + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n) \end{aligned}$$

Notation. Pour aller plus vite, on pourra écrire que “ f admet un $DL_n(a)$ ”. Par abus, on dira aussi qu’une expression $f(x)$ admet un $DL_n(a)$.

Si f admet un DL à l'ordre n en a :

- Le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$ est appelé la partie régulière du DL, de sorte que $f(x) = P(x-a) + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$.
- Le terme $o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$ est appelé le reste du DL.

Exemple 5. Soit Q un polynôme de degré inférieur ou égal à n . Montrer que la fonction $f_Q : x \mapsto Q(x)$ admet un $DL_n(a)$.

Théorème 26.4

La fonction f admet un $DL_n(a)$ si et seulement si la fonction $h \mapsto f(a+h)$ admet un $DL_n(0)$, c'est-à-dire s'il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \alpha_k h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

Méthode

Pour déterminer le $DL_n(a)$ de f , il suffit de déterminer le $DL_n(0)$ de $h \mapsto f(a+h)$ puis de repasser à la forme de la Définition 26.3 en posant $x = a+h$ et donc $h = x-a$.

Grâce à cette propriété, quand on cherche le DL d'une fonction en a , on peut toujours se ramener à un DL d'une autre fonction en 0. On peut donc se contenter d'étudier les DL en 0, ce qu'on fera le plus souvent.

Rappel : $\forall \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \lambda o_{x \rightarrow 0}(x^n) = o_{x \rightarrow 0}(\lambda x^n) = \dots$

Exemple 6. Déterminer le DL à l'ordre 3 en $\ln 2$ de la fonction $f(x) = e^x$.

1.4 Admis pour le moment : unicité, troncature et parité de DL
Théorème 26.5 – Unicité du DL

Si f admet un $DL_n(a)$, alors ce DL est unique, i.e. la partie régulière associée à ce DL est unique.

Autrement dit, il y a unicité des coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ qui vérifient

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

Théorème 26.6 – Troncature du DL

Soit $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On suppose que f admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \dots + \alpha_m(x-a)^m + \dots + \alpha_n(x-a)^n + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

Alors f admet aussi un $DL_m(a)$, obtenu en tronquant la partie régulière (on garde uniquement les termes de degré 0 à m) :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \dots + \alpha_m(x-a)^m + o_{x \rightarrow a}((x-a)^m)$$

Théorème 26.7 – DL et parité

On suppose que f admet un DL à l'ordre n en zéro :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

- Si f est *paire*, alors pour tout indice k impair, $\alpha_k = 0$:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_2 x^2 + (\dots) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

- Si f est *impaire*, alors pour tout indice k pair, $\alpha_k = 0$:

$$f(x) = \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + (\dots) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Exemple 7. DL usuels du formulaire (cf section suivante).

1.5 Formule de Taylor-Young, DL usuels
Théorème 26.8 – Formule de Taylor-Young

On suppose que $a \in D$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur D , alors f admet un $DL_n(a)$ donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

Démonstration. Sera démontrée plus loin dans le chapitre. □

En remplaçant x par $a + h$ (donc $x - a$ par h), on obtient une autre écriture du $DL_n(a)$ de f :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

En particulier, si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D , elle admet un DL à tout ordre en tout point de D . La formule de Taylor-Young permet de déduire les DL de la plupart des fonctions usuelles, cf le formulaire. **Ce formulaire est à connaître !**

Exemple 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le $DL_n(0)$ de e^x .

Exemple 9. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

2 Opérations sur les DL

2.1 Opérations entre plusieurs petit- o

Grâce au Théorème 26.2, on a pu transformer une expression de la forme $x^n \varepsilon(x)$ en $o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ et écrire, par exemple :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \quad (*)$$

Mais on peut aussi utiliser ce résultat dans l'autre sens, à savoir transformer un $o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ en $x^n \varepsilon(x)$: le DL $(*)$ revient à dire, avec $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

Il existe une fonction $\varepsilon : D \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ et :

$$\forall x \in D \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n \varepsilon(x)$$

Ceci permet d'obtenir une **égalité entre réels, valide pour tout $x \in D$** . Ainsi, on peut faire des opérations classiques de somme, de produit, composition à gauche ou à droite, etc. :

Exemple 10. Déterminer le $DL_2(0)$ de $e^x - \frac{1}{1-x}$. *(on verra qu'on peut aller plus vite plus tard)*

Ici, on a volontairement introduit des fonctions ε_1 et ε_2 pour justifier nos calculs. Mais en pratique, on s'en passe et on écrit le calcul ainsi :

Contre-intuitif, n'est-ce pas ? C'est pour cela qu'il faut garder en tête des **règles de calcul entre plusieurs petit- o** .

Théorème 26.9 – Règles de calcul entre plusieurs petit- o

(On omet de préciser " $x \rightarrow 0$ " sous les petit- o). Pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$:

- | | |
|--------------------------------|-------------------------|
| 1. $o(x^n) \pm o(x^n) = \dots$ | 4. $x^n o(x^m) = \dots$ |
| 2. $o(x^n) \pm o(x^m) = \dots$ | 5. $o(x^n)^m = \dots$ |
| 3. $o(x^n) o(x^m) = \dots$ | 6. $o(o(x^n)) = \dots$ |

Démonstration. Pour chaque règle, il faut remplacer un $o(x^n)$ par $x^n \varepsilon_1(x)$, puis un éventuel $o(x^m)$ par $x^m \varepsilon_2(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$ et factoriser par $x^{n'}$, avec n' la plus grande puissance possible sans faire apparaître de fraction, et ce qui reste sera une fonction qui tend vers 0. On aura alors un $o(x^{n'})$.

□

Remarque. Dorénavant, il faudra toujours avoir en tête qu'un $o(x^n)$ peut s'écrire comme $x^n \varepsilon(x)$, et qu'avec cette réécriture on dispose d'une égalité valide pour tout $x \in D$.

Preuve de la troncature d'un DL (Théorème 26.6).

On fait la preuve dans le cas $m = n - 1$, le cas général suivant la même logique. On suppose donc que f admet un $DL_n(a)$. Montrons que f admet un $DL_{n-1}(a)$. On a par hypothèse :

Or, il existe une fonction ε vérifiant $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et telle que :

$$\begin{aligned} \alpha_n(x-a)^n + o_{x \rightarrow a}(x-a)^n &= (x-a)^{n-1} \times [\alpha_n(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)] \\ &= o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n-1}) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x) = \alpha_0 + \dots + \alpha_{n-1}(x-a)^{n-1} + \alpha_n(x-a)^n + o_{x \rightarrow a}(x-a)^n \quad f(x) = \alpha_0 + \dots + \alpha_{n-1}(x-a)^{n-1} + o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n-1})$$

□

2.2 Combinaison linéaire de DL

On va énoncer un certain nombre de théorèmes d'opérations avec les DL. On prendra à chaque fois des DL au point $a = 0$ car on peut toujours s'y ramener, mais ils sont encore valides pour des points a quelconques.

Théorème 26.10

Si f et g admettent des $DL_n(0)$, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(0)$:

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \\ g(x) = Q(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \end{cases} \implies \lambda f(x) + \mu g(x) = \lambda P(x) + \mu Q(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Exemple 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer la formule du $DL_{2n+1}(0)$ de la fonction ch .

Remarque. On peut démontrer de même la formule du $DL_{2n}(0)$ de $\text{sh} x$, et même celles des DL de $\cos x$ et de $\sin x$ avec les formules d'Euler... mais il vaut mieux les apprendre !

Preuve de l'unicité du DL (Théorème 26.5).

Par le Théorème 26.4, il suffit de faire la preuve pour $a = 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ et $\beta_0, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tels que $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \neq (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)$ et

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Alors, par différence, on trouve

$$0 = (\beta_0 - \alpha_0) + (\beta_1 - \alpha_1)x + \dots + (\beta_n - \alpha_n)x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Par hypothèse, $(\beta_0 - \alpha_0, \dots, \beta_n - \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$. On note $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ le plus petit entier tel que $\beta_p - \alpha_p \neq 0$. Alors

$$0 = (\beta_p - \alpha_p)x^p + \dots + (\beta_n - \alpha_n)x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$(on a donc \quad \forall x \in D \quad 0 = (\beta_p - \alpha_p)x^p + \dots + (\beta_n - \alpha_n)x^n + x^n \varepsilon(x))$$

En divisant par x^p , pour tout $x \neq 0$, on obtient

$$0 = (\beta_p - \alpha_p) + \underbrace{(\beta_{p+1} - \alpha_{p+1})x + \dots + (\beta_n - \alpha_n)x^{n-p}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} + o_{x \rightarrow 0}(x^{n-p})$$

d'où $\beta_p - \alpha_p = 0$. Contradiction. D'où le résultat.

□

2.3 Produit de DL

Théorème 26.11

Si f et g admettent des $DL_n(0)$, alors la fonction fg admet un $DL_n(0)$:

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \\ g(x) = Q(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \end{cases} \implies f(x)g(x) = [P(x)Q(x)]_n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

où $[P(x)Q(x)]_n$ est une notation non officielle qui signifie qu'on ne garde que les termes du produit dont le degré est inférieur ou égal à n .

Remarque. Pour calculer le DL d'un produit, il n'est pas nécessaire de calculer tous les termes du produit $P(x)Q(x)$! On peut ne pas écrire les termes de la forme $Cte \times x^k$ avec $k \geq n+1$, car ces termes sont en particulier un $o_{x \rightarrow 0}(x^n)$, et donc seront absorbés dans le reste $o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ qu'on écrira à la fin.

Exemple 12. Déterminer le $DL_4(0)$ de $\ln(1+x) \sin x$.

Dans le calcul ci-dessus, on a appliqué la formule du produit en sortant dès le départ le reste en $o_{x \rightarrow 0}(x^4)$ et en ne gardant dans le produit que les parties régulières des deux DL. On aurait pu faire autrement :

Remarque. Pour calculer un DL de $f(x)g(x)$, on peut remplacer $f(x)$ et $g(x)$ par leur DL en incorporant les petit- o , et utiliser les opérations des petit- o pour conclure :

$$\begin{aligned} \ln(1+x) \sin x &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)x + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \end{aligned}$$

Dans ce calcul, on a l'impression qu'incorporer les petit- o n'a pas servi à grand-chose... Mais cela permet parfois d'utiliser une **astuce de pro** :

Exemple 13. Déterminer le $DL_8(0)$ de $(\cos x - 1)(\sin x - x)$.

ASTUCE DE PRO (produit). Dans le calcul ci-dessus, comme on veut le DL à l'ordre $\boxed{8}$ de $(\cos x - 1)(\sin x - x)$:

- Comme le DL de $\cos x - 1$ commence par un terme en $\boxed{x^2}$, il suffit d'avoir un DL à l'ordre $\boxed{6}$ de $\sin x - x$.
- Comme le DL de $\sin x - x$ commence par un terme en $\boxed{x^3}$, il suffit d'avoir un DL à l'ordre $\boxed{5}$ de $\cos x - 1$.

2.4 Composition à droite et substitution dans les DL

Théorème 26.12

Soit $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ et $b \in \overline{D'}$. On suppose que f admet un $DL_n(0)$:

$$f(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_n X^n + o_{X \rightarrow 0}(X^n)$$

On peut remplacer X par $g(x)$ à condition que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$:

$$f(g(x)) = \alpha_0 + \alpha_1 g(x) + \dots + \alpha_n g(x)^n + o_{x \rightarrow 0}(g(x)^n)$$



L'égalité $f(g(x)) = \dots$ ci-dessus n'est pas nécessairement un DL de $f(g(x))$.

La condition $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ est toujours remplie avec $g(x) = x^2$ ou $g(x) = -x \dots$ De sorte qu'on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 26.13 – Substitution dans un DL

Dans un $DL_n(0)$ de $f(x)$, on peut substituer tous les x par $\pm x^k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 14. Déterminer le $DL_6(0)$ de $\frac{1}{1+x^2}$.

ASTUCE DE PRO (substitution). Si on veut le DL à l'ordre $\boxed{2n}$ de $f(x^2)$, il suffit d'avoir le DL à l'ordre $\boxed{n}$ de $f(X)$ et de substituer X par x^2 .

Remarque. On peut de cette façon retrouver le DL de $\frac{1}{1+x}$ à partir du DL de $\frac{1}{1-x}$.

Preuve de la parité du DL (Théorème 26.7).

On fait la preuve uniquement dans le cas où f est paire. Alors

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n + o_{x \rightarrow 0}((x)^n)$$

$$f(-x) = \alpha_0 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + (-1)^n \alpha_n x^n + o_{x \rightarrow 0}((x)^n)$$

Or, f étant paire, on a $f(x) = f(-x)$. Par unicité du DL, on en déduit que les parties régulières ci-dessus sont égales :

$$\alpha_0 = \alpha_0 \quad \alpha_1 = -\alpha_1 \quad \alpha_2 = \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n = (-1)^n \alpha_n$$

c'est-à-dire $\alpha_k = (-1)^k \alpha_k$ pour tout k . Ainsi, si k est impair, nécessairement $\alpha_k = 0$.

□

Méthode

Pour calculer le DL en 0 d'une composée $(f \circ g)(x)$:

1. Remplacer $g(x)$ par son DL (petit- o inclus).
2. Identifier un DL usuel en 0 associé à la fonction f , qu'on écrit avec une variable X .
3. Faire apparaître une quantité X à poser qui tend vers 0, et composer à droite.

Exemple 15. Déterminer le $DL_4(0)$ de $\sqrt{\cos x}$.

ASTUCES DE PRO (composition). Lorsqu'on cherche le DL à l'ordre $2n$ d'une composée $f(g(x))$, si le premier terme **non nul** de X est en x^2 , il suffit d'avoir le DL en X à l'ordre n (cf exemple ci-dessus).

2.5 Passage à l'inverse dans un DL

Théorème 26.14

Si f admet un $DL_n(0)$ dont le premier terme α_0 est **non nul**, alors $\frac{1}{f}$ admet un $DL_n(0)$:

$$\begin{cases} f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \\ \alpha_0 \neq 0 \end{cases} \implies \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + o_{x \rightarrow 0}(x^n)} = \frac{1}{\alpha_0} \times \frac{1}{1 + X}$$

avec $X = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}x + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_0}x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, ce qui permet de faire une composition en utilisant le DL de $\frac{1}{1+X}$ en 0.

Remarque. On peut aussi dire que $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\alpha_0} \times \frac{1}{1-Y}$ avec $Y = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}x - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_0}x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ et utiliser le DL de $\frac{1}{1-Y}$ en 0 (ce qui est moins piègeur).

Pour avoir le DL d'un quotient $\frac{g(x)}{f(x)}$, il suffit de faire le produit du DL de $g(x)$ avec le DL de $\frac{1}{f(x)}$.

Exemple 16. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\tan x$.

2.6 Liens entre DL, limite, dérivabilité

Théorème 26.15 – $DL_0(a)$ et existence d'une limite en a

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f(x) = \alpha_0 + o_{x \rightarrow a}(1)$ (ce qui est le $DL_0(a)$ de f)
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha_0$

En particulier :

- si f est définie en a , alors f est continue en a .
- si f n'est pas définie en a , alors f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = \alpha_0$.

Démonstration.

$f(x) = \alpha_0 + o_{x \rightarrow a}(1)$ revient à dire que

$$f(x) = \alpha_0 + \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Si f vérifie cette assertion, il est clair que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha_0$. Réciproquement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha_0$, alors on a l'assertion ci-dessus en posant $\varepsilon(x) := f(x) - \alpha_0$.

□

Remarque. Si $\alpha_0 = 0$, alors $\frac{1}{f(x)}$ n'admet pas de DL en 0 (car $\frac{1}{f(x)}$ n'admet pas de limite finie quand x tend vers 0). C'est le cas par exemple de $\frac{1}{\sin x}$, qui n'admet donc pas de DL en 0 (même à l'ordre zéro). Toutefois, même si $\alpha_0 = 0$, il se peut qu'un quotient $\frac{g(x)}{f(x)}$ admette un DL en 0 après simplification par x (ou $x^2, x^3 \dots$) dans la fraction, cf exemple ci-dessous.

Exemple 17. Déterminer le $DL_2(0)$ de $\frac{x}{\sin x}$.

Théorème 26.16 – $DL_1(a)$ et dérivabilité en a

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + o_{x \rightarrow a}(x-a)$ (ce qui est le $DL_1(a)$ de f)
2. f est prolongeable par continuité en a (si $a \notin D_f$) en posant $f(a) = \alpha_0$ et de plus, f est dérivable en a avec $f'(a) = \alpha_1$.

Remarque. En particulier, si f admet un $DL_1(a)$, alors (après éventuel prolongement par continuité) on a toujours $f(x) = [f(a) + f'(a)(x-a)] + o_{x \rightarrow a}(x-a)$. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est directement donnée par la partie régulière du $DL_1(a)$ de f .



Si f admet un $DL_n(a)$ avec $n \geq 2$, on ne peut pas en déduire que f est n fois dérivable en a (ni même de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ en a), cf exemple ci-dessous.

Exemple 18. On pose $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x^2}$. Alors f admet un $DL_2(0)$ donné par $f(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^2)$. Montrer cependant que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Cependant, par la formule de Taylor-Young (Théorème 26.8), si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et que $a \in I$, alors f admet un $DL_n(a)$.

2.7 Intégration de DL

Théorème 26.17 – Intégration d'un DL

On suppose que f est continue sur D . Soit F une primitive de f sur D . Si f admet un $DL_n(a)$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (x-a)^k + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

alors F admet un $DL_{n+1}(a)$ donné par :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o_{x \rightarrow a}((x-a)^{n+1})$$

On remarque au passage qu'une primitive de $(x-a)^k$ est $\frac{1}{k+1}(x-a)^{k+1}$. Autrement dit, on peut "primitiver" terme à terme la partie régulière et le petit- o . Attention à bien rajouter $F(a)$!

Exemple 19. Déterminer le $DL_n(0)$ de $F : x \mapsto \ln(1+x)$.

Exemple 20. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\arctan$.

On peut obtenir de même les DL de $\arcsin$ et $\arccos$.

Remarque (Preuve rapide de Taylor-Young). Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur D . Alors $f^{(n)}$ est continue et admet donc un $DL_0(a)$:

$$f^{(n)}(x) = f^{(n)}(a) + o_{x \rightarrow a}(1)$$

En intégrant ce DL, on trouve

$$f^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)x + o_{x \rightarrow a}(x)$$

et donc $f^{(n-1)}$ admet un $DL_1(a)$. En réintégrant :

$$f^{(n-2)}(x) = f^{(n-2)}(a) + f^{(n-1)}(a)x + f^{(n)}(a)\frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow a}(x^2)$$

donc $f^{(n-2)}$ admet un $DL_2(a)$, etc. Par récurrence, on montre donc que la fonction $f^{(0)}$, c'est-à-dire f , admet un $DL_n(a)$ donné par le Théorème [26.8](#).

2.8 Dérivation de DL ? Attention !



Si f est dérivable et admet un $DL_n(a)$, cela ne veut pas dire que f' admet un $DL_{n-1}(a)$ qu'on obtiendrait par dérivation terme à terme du $DL_n(a)$ de f , cf exemple ci-dessous.

Exemple 21. On pose $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ donc $f(x) = o_{x \rightarrow 0}(x)$. Ainsi, f admet un $DL_1(0)$.

On montre facilement que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Supposons par l'absurde que f' admette un $DL_0(0)$. Alors par le Théorème 26.15, f' serait continue en 0. Or, on peut vérifier que f' n'est pas continue en 0 car le terme $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0. Contradiction.

Remarque. Cependant, si f est de classe $\mathcal{C}^n$, alors f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ et par le Théorème 26.8, on sait que f admet un $DL_n(a)$ et f' admet un $DL_{n-1}(a)$. Dans ce cas, on peut affirmer que le DL de f' s'obtient en dérivant celui de f .

3 Applications des développements limités

Hypothèse

Dans le reste du chapitre, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

3.1 Obtention d'équivalents

Théorème 26.18

Supposons que f admet un $DL_n(a)$:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \cdots + \alpha_n(x-a)^n + o_{x \rightarrow a}((x-a)^n)$$

Si $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$, en notant $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ le plus petit entier tel que $\alpha_p \neq 0$, on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \alpha_p(x-a)^p$$

En particulier, $f(x)$ est du signe (strict) de $\alpha_p(x-a)^p$ au voisinage de a .

Démonstration. En effet, en tronquant le DL au rang p , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_p(x-a)^p + o_{x \rightarrow a}((x-a)^p) \\ &= \alpha_p(x-a)^p + o_{x \rightarrow a}(\alpha_p(x-a)^p) \quad \text{car } \alpha_p \neq 0 \\ &\underset{x \rightarrow a}{\sim} \alpha_p(x-a)^p \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $f(x) = g(x) + o_{x \rightarrow a}(g(x))$ équivaut à $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, avec $g(x) = \alpha_p(x-a)^p$. D'où le résultat. $\square$

Méthode

Pour calculer un équivalent en a d'une **somme** $f(x) + g(x)$, on peut calculer un DL en a de $f(x) + g(x)$ à un ordre suffisamment élevé pour faire apparaître un terme non nul dans la partie régulière, et en déduire l'équivalent.

En effet, contrairement aux équivalents, on peut additionner les DL !

Exemple 22. Calculer un équivalent en 0 de $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}$.

3.2 Étude du signe local

Obtenir ces équivalents permet entre autres de calculer plus facilement des limites. Mais cela sert aussi à étudier le signe local :

Rappel : si $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \alpha_p(x-a)^p$, alors $g(x)$ a le même signe que $\alpha_p(x-a)^p$ au voisinage de a . En fonction de la parité de p et du signe de α_p , on en déduit le signe de $g(x)$ au voisinage de a .

Méthode

- Pour trouver si a est un extremum local, on peut chercher un équivalent en a de $f(x) - f(a)$, ce qui donne le signe local de $f(x) - f(a)$.
- Pour trouver la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport sa tangente en a , on peut chercher un équivalent en a de $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$.

Exemple 23. On pose $f : x \mapsto \operatorname{ch}(x^3) - \operatorname{sh}(x^3)$. Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en 0, puis la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T (au voisinage de 0).

Exemple 24. On pose $f : x \mapsto \operatorname{ch}(x^3) - \operatorname{sh}(x^3)$. Est-ce que f admet un extremum local en 0 ?

Exemple 25. On pose $f : x \mapsto \operatorname{ch}(x^2) - \operatorname{sh}(x^2)$. Est-ce que f admet un extremum local en 0 ?

3.3 Extrema locaux : conditions du second ordre

Rappel : on suppose $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable (avec I non trivial). Si f admet un extremum local en un point a intérieur à I , alors nécessairement a est un point critique, i.e. $f'(a) = 0$.

Il ne s'agit que d'une condition *nécessaire*, la réciproque est fautive : 0 est un point critique de $f(x) = x^3$, mais ce n'est pas un extremum local.

Théorème 26.19 – Conditions d'optimalité du second ordre

Soit a un point intérieur de I et $f \in \mathcal{C}^2(I)$.

Conditions nécessaires du second ordre :

- Si f admet un minimum local en a , alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$.
- Si f admet un maximum local en a , alors $f'(a) = 0$ et $f''(a) \leq 0$.

Conditions suffisantes du second ordre :

- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local (strict) en a .
- Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local (strict) en a .

Démonstration.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a implique qu'il existe une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + (x-a)^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$$

Preuve des conditions nécessaires : on ne montre que le premier item. Si f admet un minimum local en a , alors a est un point critique donc $f'(a) = 0$. Ainsi, on a

$$\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + (x-a)^2\varepsilon(x) = f(x) - f(a)$$

De plus, $f(x) - f(a) \geq 0$ pour x suffisamment proche de a . Ainsi, pour $|x-a|$ assez petit,

$$\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + (x-a)^2\varepsilon(x) \geq 0$$

En supposant $x \neq a$, en divisant par $(x-a)^2$ et en prenant la limite quand x tend vers a , on obtient $\frac{1}{2}f''(a) \geq 0$. D'où le résultat.

Preuve des conditions suffisantes : on ne montre que le premier item. On suppose $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, donc :

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + o_{h \rightarrow 0}((h)^2)$$

Comme $\frac{1}{2}f''(a) \neq 0$, il s'agit d'un DL de $f(x) - f(a)$ sous forme normalisée. Ainsi,

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$$

et en particulier, $f(x) - f(a)$ a le même signe local (strict) que $\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$. Ainsi, a est un minimum local (strict).

□

Remarque. Si $f'(a) = f''(a) = 0$, tous les cas sont possibles (maximum, minimum, pas d'extremum en a). Par exemple $f(x) = x^2$ et $f(x) = \pm x^4$ avec $a = 0$.

Dans la pratique, si on cherche les extrema locaux d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, on dressera plutôt un tableau de variations (ce qui permet aussi de vérifier si un extremum est global). C'est une méthode plus efficace que d'utiliser les conditions suffisantes du second ordre. Cependant, ces conditions se généralisent aux cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{R}^3$, etc. et deviennent alors des outils indispensables !

3.4 Développements asymptotiques (DA)

Hypothèse

Dans cette section, le réel a peut être infini.

Lorsque $a = \pm\infty$, on suppose que $\pm\infty$ est une extrémité d'un intervalle de D .

Définition 26.20

On dit que f admet un développement asymptotique (DA) à n termes en a s'il existe des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{K}^D$ et des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\begin{cases} f(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) + o_{x \rightarrow a}(\varphi_n(x)) \\ \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad \varphi_{k+1}(x) = o_{x \rightarrow a}(\varphi_k(x)) \end{cases}$$

On peut également dire qu'il s'agit d'un DA à la précision $\varphi_n(x)$, la fonction dans le petit- o .

La famille $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ est appelée une échelle (de comparaison) au voisinage de a .

Exemple 26. Si a est fini, alors f admet un $DL_n(a)$ ssi f admet un DA à $n+1$ termes en a selon l'échelle $\left(x \mapsto (x-a)^k\right)_{0 \leq k \leq n}$:

$$f(x) = \alpha_0 \times \underbrace{1}_{\varphi_0(x)} + \alpha_1 \underbrace{(x-a)}_{\varphi_1(x)} + \dots + \alpha_n \underbrace{(x-a)^n}_{\varphi_n(x)} + o_{x \rightarrow a} \left(\underbrace{(x-a)^n}_{\varphi_n(x)} \right)$$

Exemple 27. On peut montrer que $\sqrt{x^2 + x + 1}$ admet un DA à 4 termes en $+\infty$:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} - \frac{3}{16x^2} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

Méthode

Pour trouver un DA en a d'une expression $f(x)$, on peut :

- avec des réécritures, faire apparaître un DL avec une expression X qui tend vers 0 quand x tend vers a , et composer à droite.
- sinon (mais c'est très calculatoire et très long !), on peut chercher des équivalents successifs, qu'on notera ici $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$, etc. :

1. $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \psi_0(x)$,
2. $f(x) - \psi_0(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \psi_1(x)$,
3. $f(x) - \psi_0(x) - \psi_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \psi_2(x)$, etc.

Si on s'arrête à ψ_2 , on obtient le DA : $f(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) + \psi_2(x) + o_{x \rightarrow a}(\psi_2(x))$.

Exemple 28. Déterminer un DA à 3 termes de $\frac{1}{\sin x}$ en 0.

Les suites peuvent également faire l'objet de DA mais ce sera toujours en $+\infty$ pour la variable n . Des suites $(u, v, w, \dots)$ forment une échelle de comparaison (en $+\infty$) si $u_n = o(v_n)$, $v_n = o(w_n)$, etc.

Exemple 29. Déterminer un DA à 3 termes de $\frac{1}{n + \ln(n)}$ en $+\infty$.

3.5 Asymptotes obliques

Définition 26.21

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = \alpha x + \beta$ si

$$f(x) - (\alpha x + \beta) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On définit de même la notion d'asymptote oblique en $-\infty$.

Pour parler d'asymptote oblique, la fonction f peut n'être définie qu'au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$. Par souci de simplicité, on considère ici que $D_f = \mathbb{R}$. L'objectif est de déterminer l'asymptote oblique de f en $+\infty$ et la position relative de $\mathcal{C}_f$ avec cette asymptote au voisinage de $+\infty$. On peut adapter facilement cela au cas où l'asymptote est en $-\infty$.

Méthode – Équation et position relative selon une asymptote oblique en $+\infty$

1. On cherche un DA en $+\infty$ de $f(x)$ selon l'échelle $(x, 1)$:

$$f(x) = \alpha x + \beta + \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(1)$$

Dans ce cas, $y = \alpha x + \beta$ est l'équation de l'asymptote oblique de f en $+\infty$. *Note* : il est parfois plus facile de chercher un DA de $\frac{f(x)}{x}$ selon $\left(1, \frac{1}{x}\right)$ puis de tout multiplier par x .

2. Pour avoir la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de l'asymptote, il faut déterminer un équivalent de $f(x) - (\alpha x + \beta)$ en $+\infty$. Il faut donc obtenir un terme non nul supplémentaire dans le DA ci-dessus.

Exemple 30. On pose $f(x) = \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq \alpha^2$. Montrer que f admet une asymptote oblique et déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de cette asymptote oblique (à discuter selon α et β).

Remarque. Si $\beta = \alpha^2$, alors $\frac{1}{2}(\beta - \alpha^2) = 0$ et donc on ne dispose plus d'un équivalent de $f(x) - (x + \alpha)$ en $+\infty$, ce qui nous forcerait à aller plus loin dans le DA... Mais fort opportunément, lorsque $\beta = \alpha^2$, on a $f(x) = \sqrt{(x + \alpha)^2} = x + \alpha$ pour $x \geq -\alpha$. Donc au voisinage de $+\infty$, $\mathcal{C}_f$ est confondue avec son asymptote oblique.

4 Méthodes pour les exercices

Le plus important dans ce chapitre est de bien savoir réaliser des combinaisons linéaires, des produits, des composées, des passages à l'inverse et des intégrations dans les DL ! Ainsi que de connaître les DL du formulaire.

Méthode

Pour calculer un équivalent, on peut :

- Utiliser les méthodes du chapitre précédent.
- Calculer un DL avec un terme non nul et passer à l'équivalent.

Méthode

Pour calculer la limite d'une expression avec une forme indéterminée, on peut :

- Chercher à lever l'indétermination par des réécritures, par les croissances comparées, l'utilisation de taux d'accroissement, ...
- Chercher un équivalent de l'expression.

Méthode

Pour savoir si f admet un extremum local en a , on étudie le signe local de $f(x) - f(a)$ en cherchant son équivalent en a .

Méthode

Pour déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à toute autre courbe d'équation $y = g(x)$ au voisinage de a , il suffit d'étudier le signe local de $f(x) - g(x)$ au voisinage de a , en cherchant son équivalent en a .

Méthode

Pour calculer un DA de $f(x)$:

- Si possible, faire apparaître un DL (éventuellement avec une composition à droite, cf Exemple 28).
- Chercher des équivalents successifs $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \psi_0(x)$, puis $f(x) - \psi_0(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \psi_1(x)$, puis $f(x) - \psi_0(x) - \psi_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \psi_2(x)$, jusqu'à avoir assez de termes.